

verteilung im ganzen, wie sie durch die Streuung gekennzeichnet ist. — Für niedrige Temperaturen kann \varkappa groß sein; die Ergodenhypothese braucht dann nicht zuzutreffen.

Wir setzen jetzt \varkappa als klein voraus und wenden unsere Ergebnisse auf die eingangs erklärte Funktion $N(x)$ an. Bezeichnen wir die (unter sich gleichen) Wahrscheinlichkeiten der Mengen M_i , M_i^* , M^* mit p^* und die relative Verweilzeit des laufenden Phasenpunktes $\chi(\hat{x}, t)$ in M_i mit τ^* , so wird

$$eM_i = eM_i^2 = p^*, \quad \hat{e}M_i = \tau^*,$$

$$\text{also} \quad \bar{N} = n p^*, \quad \hat{N} = n \tau^*$$

und schließlich

$$P \left[\left| \frac{\tau^* - p^*}{p^*} \right| \geq k \right] < \frac{1}{k^2} \frac{1 - p^*}{p^*} \left(\frac{1}{n} + \varkappa \right),$$

d. h. die relative Verweilzeit des laufenden Phasenpunktes in einer Zylindermenge M_i ist „im allgemeinen“ nahezu gleich der Wahrscheinlichkeit p^* dieser Menge — vorausgesetzt, daß p^* positiv und nicht allzu klein ist.

Indem wir τ^* durch \hat{N}/n ersetzen, können wir die letzte Ungleichung auch so interpretieren: Die relative Anzahl aller Partikel in M^* ist im Zeitmittel „im allgemeinen“ nahezu gleich der Wahrscheinlichkeit von M^* . — Diese Deutung läßt eine erhebliche Verallgemeinerung zu. In ganz ähnlicher Weise kann man nämlich zeigen, daß die Behauptung richtig bleibt, wenn man die Worte „im Zeitmittel“ durch die Worte „in jedem Augenblick“ ersetzt; und diese Aussage bleibt sogar für zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilungen richtig. Die Aussage über die relative Verweilzeit dagegen läßt sich nicht auf zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilungen übertragen.

Das alles gilt nur für solche Phasenfunktionen, deren Werte der Beobachtung tatsächlich zugänglich sind, d. h. für die Summenfunktionen. Für sie können bei gegebener HAMILTON-Funktion und Wahrscheinlichkeitsverteilung alle angedeuteten Rechnungen prinzipiell und näherungsweise auch praktisch wirklich ausgeführt werden, so daß es möglich ist, für konkret gegebene Daten den Grad der Ergodizität des Systems numerisch abzuschätzen.

Bemerkungen zur Messung des Hall-Effektes in Ferromagneticis

Von K. M. KOCH, W. RINDNER und K. STERNAT

Aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Wien

(Z. Naturforsch. 13 a, 113—116 [1958]; eingegangen am 15. November 1957)

Bei Messungen des HALL-Effektes an ferromagnetischen Streifenproben bewirkt jede Abweichung von der exakten Orientierung der Streifen zur Feldrichtung recht bedeutende Meßfehler, weil die Magnetisierung infolge der Unterschiede der Entmagnetisierungsfaktoren senkrecht und parallel zur Streifenebene nicht mehr mit der Feldrichtung übereinstimmt. Es ist zu erwarten, daß die Fortführung dieser Versuche eine Trennung des ordentlichen und außerordentlichen HALL-Effektes auch bei kleinen Feldstärken ermöglicht.

§ 1.

Die Messung der galvano- und thermomagnetischen Effekte erfolgt im allgemeinen an streifenförmigen Probekörpern, deren kürzeste Dimension in Richtung der magnetischen Kraftlinien liegt. Bei der Untersuchung ferromagnetischer Stoffe ergeben sich aus dieser Formgebung jedoch gewisse Schwierigkeiten, weil infolge des großen und nicht genau angebbaren Entmagnetisierungsfaktors ($N \sim 4\pi$) die Magnetisierung der Probe $[M = (B - H)/4\pi]$ aus dem äußeren Feld nur sehr angenähert abgeleitet werden kann. Die Magnetisierung ist aber gerade die Größe, von der — wie wir weiter unten sehen

werden —, der „außerordentliche“ HALL-Effekt abhängen soll. Man hat diese Schwierigkeit durch die Verwendung stabförmiger Proben, deren Längsachse parallel zum Magnetfeld orientiert wurde, zu umgehen versucht¹. Dabei entstanden durch die nicht ganz übersichtliche Strom- und Spannungsverteilung neue Unklarheiten, die die Vergleichbarkeit der Resultate erschweren. Die meisten neueren Untersuchungen, darunter auch eine an unserem Institut durchgeführte², sind deshalb doch wieder an der herkömmlichen Streifenform gemacht worden.

Halten wir an der üblichen Darstellung des HALL-Effektes in Ferromagneticis fest, nach der die gemessene Transversalspannung aus zwei Summanden

¹ I. K. KIKOIN, Phys. Z., Sowjetunion 9, 1 [1936]. — E. M. PUGH, Phys. Rev. 36, 1503 [1930].

² W. RINDNER u. K. M. KOCH, Z. Naturforsch. 13 a, 26 [1958].



bestehen soll, von denen der erste der Feldstärke („ordentlicher“ H.-E.), der zweite der Magnetisierung senkrecht zur Streifenebene („außerordentlicher“ H.-E.) proportional sein soll.

$$E_y = R_0 H + R_1 M; \quad (1)$$

(Stromstärke und Dicke = 1 angenommen).

In den meisten Fällen ist $R_1 \gg R_0$. Daraus ergibt sich, daß E_y mit wachsender (äußerer) Feldstärke zuerst sehr schnell ansteigt, weil das Glied mit M dominiert, und erst nach erreichter Sättigung ($M = \text{const}$) den durch R_0 gegebenen Anstieg zeigt. R_0 entspricht annähernd dem durch die Zahl n der „freien“ Elektronen bestimmten Wert $R_0 = 1/n e$. Eine vollständig befriedigende theoretische Begründung der in Gl. (1) ausgedrückten Aufteilung des Effektes, der eine lineare Überlagerung zweier Leitungsmechanismen entsprechen müßte, liegt zur Zeit kaum vor. Man kann deshalb ohne Bedenken die Frage aufwerfen, ob nicht vielleicht unter Versuchsbedingungen, bei denen H und M nicht mehr in die gleiche Richtung fallen, Abweichungen von der einfachen Additivität der beiden Teileffekte auftreten. H und M können verschiedene Richtung haben, wenn das Probenmaterial eine magnetische Vorzugsrichtung hat, die nicht mit der Feldrichtung übereinstimmt; aber auch, wie wir gleich zeigen wollen, im Falle der Formanisotropie, die mit der Streifenform verknüpft ist.

§ 2.

a) Betrachten wir zunächst einen Versuchskörper aus einem Material, das eine *einzige* magnetische Vorzugsrichtung (VZR) aufweist. Die Form des Probekörpers sei so gewählt, daß der Entmagnetisierungsfaktor in allen Richtungen innerhalb der durch Feld und VZR aufgespannten Ebene der gleiche sei. (Also z. B. ein Kreiszylinder, dessen Achse auf dieser Ebene senkrecht steht.) Lassen wir ein Magnetfeld H unter dem Winkel φ zur VZR einwirken, so dreht sich der Magnetisierungsvektor M_s um einen Winkel ϑ aus der VZR, der durch das Minimum der Summe aus Anisotropieenergie und magnetischer Energie

$$E = K_0 + K_1 \sin^2 \vartheta - H M_s \cos(\varphi - \vartheta) \quad (2)$$

bestimmt ist. (H sollte hier das wahre, im Probeninneren wirksame Feld sein.) Setzen wir der Einfachheit halber $\varphi = 90^\circ$, so erhalten wir aus $dE/d\vartheta = 0$

$$\sin \vartheta = \frac{M_s}{2 K_1} H \quad (3)$$

und somit für alle Werte von H , die kleiner sind als $2 K_1/M_s$ das Ergebnis, daß der Magnetisierungsvektor *zwischen* der VZR und dem Feld liegt. Nur für $H \geq 2 K_1/M_s$ fallen Feld- und Magnetisierungsrichtung zusammen.

b) Als Gegenstück hierzu betrachten wir einen Versuchskörper, der magnetisch isotrop ist, dagegen in zwei zueinander senkrechten Richtungen die Entmagnetisierungsfaktoren N_y und N_z ($N_z \gg N_y$) aufweist. Dieser Fall ist bei unserer Streifenprobe gegeben, die wir durch ein Ellipsoid annähern können. Senkrecht zur Fläche, in Richtung der Kraftlinien (= z -Richtung) haben wir N_z in der Größenordnung von 4π , parallel zur Fläche in Richtung der HALL-Elektroden (y -Richtung) einen sehr kleinen, vom Verhältnis Dicke/Breite abhängigen Entmagnetisierungsfaktor N_y . (In der Längs- = Stromrichtung ist $N_x < N_y$, spielt aber für unser Problem keine Rolle.) Sei nun in einer Richtung, die in der y - z -Ebene liegt und mit der y -Achse den Winkel ϑ einschließt, Sättigung erreicht, d. h. $M = M_s$, so gibt dies die Komponenten $M_y = M_s \cos \vartheta$, $M_z = M_s \sin \vartheta$ und somit die Streufeldenergie

$$E = (N_y \cos^2 \vartheta + N_z \sin^2 \vartheta) M_s^2 / 2 \\ = \frac{(N_z - N_y)}{2} M_s^2 \sin^2 \vartheta + \frac{N_y M_s^2}{2}. \quad (4)$$

Die Streufeldenergie wächst mit $\sin^2 \vartheta$ in der gleichen Weise wie die Anisotropieenergie. Wir können daher zur Berechnung von ϑ bei gegebener Feldstärke H , die mit y den Winkel φ einschließen möge, die Gl. (2) benutzen, wenn wir K_0 (das beim Differenzieren wegfällt) gleich $N_y M_s^2 / 2$ und $K_1 = (N_z - N_y) M_s^2 / 2$ setzen. Insbesondere gilt für $\varphi = 90^\circ$ die modifizierte Gl. (3), die hier besagt, daß die gesamte Magnetisierung in die schwerste Richtung gedreht wird, wenn $H = (N_z - N_y) \cdot M_s$ wird.

c) Ehe wir nun die Gl. (2) auf den allgemeinen Fall $0 < \varphi < 90^\circ$ anwenden, muß auf einen berechtigten Einwand eingegangen werden. Wir haben Gl. (2) so aufgestellt, als ob für jeden Wert der Feldstärke die gesamte spontane (= Sättigungs-) Magnetisierung in der Richtung ϑ liegen würde. Das stimmt, wie eingehendere Überlegungen zeigen, tatsächlich nur sehr angenähert. Für die erste Deutung der nachstehend beschriebenen Versuchsergebnisse reicht diese Näherung aber aus.

Differenzieren wir nun Gl. (2) unter der Annahme $0 < \varphi < 90^\circ$, so erhalten wir für das Energieminimum

$$dE/d\vartheta = 2 K_1 \sin \vartheta \cos \vartheta - H M_s \sin(\varphi - \vartheta) = 0 \quad (5)$$

und daraus für $\sin \vartheta$ als Funktion von H und φ eine Gleichung 4. Grades, deren Lösung ziemlich umständlich wäre. Wir können aber aus Gl. (5) ohne viel Rechenarbeit einen Schluß ableiten, der für die Deutung unserer Meßergebnisse von Bedeutung ist. Lösen wir nämlich nach H auf,

$$H = K_1 \sin 2 \vartheta / [M_s \sin(\varphi - \vartheta)], \quad (6)$$

so erkennen wir, daß ein vollständiges Hineindrehen des Magnetisierungsvektors in die Feldrichtung ($\vartheta = \varphi$) wegen $\sin 0 = 0$ nur bei $H \rightarrow \infty$ möglich ist. Das heißt, der Magnetisierungsvektor schließt für endliche Werte von H mit der y -Achse einen Winkel ein, der kleiner ist als φ .

Wir haben somit, zumindest halbquantitativ, gezeigt, daß sowohl im Falle einer strukturell bedingten Anisotropie als auch im Falle der in der Streifenform gegebenen Formanisotropie Zustände möglich sind, bei denen Magnetisierung und Feld einen Winkel miteinander einschließen, der im Grenzfall nahe an 90° betragen kann. Darüber hinaus haben die vorstehenden Überlegungen gezeigt, daß bei verhältnismäßig kleinen Abweichungen des Magnetfeldes von der Senkrechtstellung relativ zum Probestreifen ein Umlappen der Magnetisierung gegen die Richtung der leichtesten Magnetisierbarkeit erfolgen muß. Würde die Magnetisierung mit dem Feld mitgehen, so dürften wir bei einer Verdrehung der Probe mit einer Abnahme der HALL-Spannung rechnen, die ungefähr dem Sinus des Winkels φ zwischen H und Streifenebene entspricht. Sind unsere Überlegungen richtig, so muß die Abnahme der HALL-Spannung bei Drehung des Streifens *schneller* erfolgen als mit $\sin \varphi$.

§ 3.

Mit Hilfe einer Vorrichtung, die eine definierte Drehung einer Streifenprobe im Feld eines Elektromagneten gestattet, wurden Messungen des HALL-Effektes an magnetisch isotropem Nickel, an PUPIN-Spulenblech der Fa. Philips (einer Fe-Ni-Legierung mit rund 50% Ni und einer ausgeprägten magnetischen Vorzugslage in der Blechebene senkrecht zur Walzrichtung), und vergleichsweise auch an Sil-

ber durchgeführt. Die Messungen erfolgten so, daß entweder die Probe bei konstantem Feld allmählich aus der normalen Stellung ($\varphi = 90^\circ$) herausgedreht oder bei konstantem Winkel das äußere Feld allmählich gesteigert wurde.

Abb. 1 zeigt die Abhängigkeit der HALL-Spannung vom Drehwinkel bei konstantem (äußeren) Magnetfeld für Nickel. Zum Vergleich sind die gut auf einer Sinuslinie liegenden Punkte einer an Silber gewonnenen Meßreihe eingezeichnet. Die Abweichungen liegen eindeutig in der vorausgesagten Richtung.

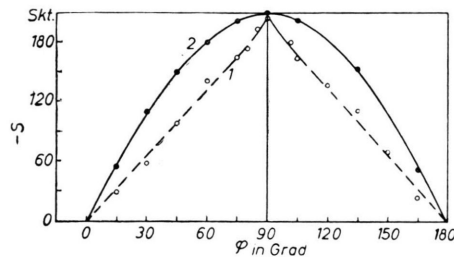


Abb. 1. Kurve 1: HALL-Spannung (1 Skt. = $2,2 \cdot 10^{-9}$ V) von Ni (0,1 mm dick) als Funktion des Winkels zwischen Blechebene und H ; $H = \text{const} = 5,4$ kOe, $J = 0,1$ A. Kurve 2: Messungen an Ag (0,02 mm dick) zum Vergleich. $H = 8,0$ kOe, $J = 0,05$ A.

Aus dem PUPIN-Spulenblech wurden Proben mit der Vorzugsrichtung in y -Richtung und solche mit der VZR in der Strom- = x -Richtung geschnitten. In Abb. 2 sind Messungen an einer Probe der ersten Art wiedergegeben, und zwar wurde hier bei festgehaltenem Winkel der Blechebene zur Feldrichtung die Feldstärke im Spalt variiert. Man kann aus dieser Darstellung ohne weitere Schwierigkeiten ableiten, daß sich auch in diesem Fall für $H = \text{const}$,

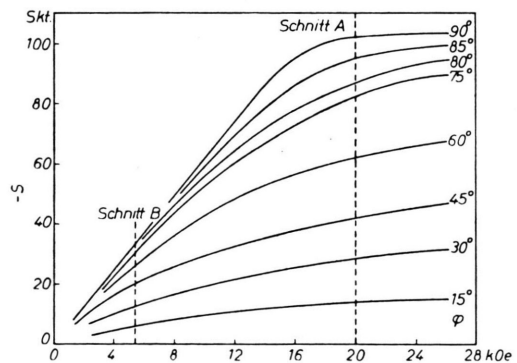


Abb. 2. HALL-Spannung (1 Skt. = $4,4 \cdot 10^{-9}$ V) von PUPIN-Spulenblech als Funktion des Spaltfeldes H bei verschiedenen Winkeln zwischen Blechebene und H . Die auf den strichlierten Vertikalen (Schnitt A mit B) gelegenen Schnittpunkte würden ähnliche Kurven liefern wie Kurve (1) in Abb. 1.

φ von 0 bis 90° variiert, der gleiche schnelle Abfall der HALL-Spannung bei kleinen Abweichungen des Winkels von 90° ergibt, wie er in Abb. 1 für Ni dargestellt wurde.

Es darf noch vermerkt werden, daß die Messungen an dem Fe-Ni-Blech die gleichen Ergebnisse lieferten, gleichgültig ob die VZR in die y - oder x -Richtung fällt. Das wird verständlich, wenn man die beiden Energietermine vergleicht, die in Gl. (2) den Einfluß der Anisotropie darstellen. Nach BECKER und DÖRING³ ist die Vorzugsrichtung in dem von SNOEK entwickelten PUPIN-Spulenblech etwa so zu beschreiben, als ob sie durch eine Zugspannung σ von rund 104 kg/cm^2 hervorgerufen würde. Das gibt, mit dem Wert der Sättigungsmagnetostraktion $\lambda_s \sim 2 \cdot 10^{-5}$ multipliziert, eine Anisotropieenergie

$$E_A = 3/2 \lambda_s \sigma = 3 \cdot 10^5 \text{ erg/cm}^3.$$

Vergleichen wir mit dem Wert der Streufeldenergie ($N_y \sim 0$, $N_z \sim 4\pi$)

$E_{\text{Streufeld}} \sim M_s^2 \cdot N_z / 2 = 1250^2 \cdot 4\pi / 2 \sim 10^7 \text{ erg/cm}^3$, so sehen wir, daß der Einfluß der Vorzugsrichtung gegenüber dem der Formanisotropie des Streifens vernachlässigt werden kann.

³ R. BECKER u. W. DÖRING, *Ferromagnetismus*, Springer-Verlag, Berlin 1939, S. 432.

§ 4.

Die bis heute durchgeführten Messungen sind noch zu unvollständig, um eine Auswertung in Richtung der Aufteilung des Effektes und damit eine Entscheidung über die einleitend aufgeworfene Behauptung zu erlauben. Sie liefern aber ein vorläufiges Resultat, dem man nicht alle Bedeutung absprechen kann, nämlich den Hinweis, daß der Lage des Probestreifens im Magnetfeld bei ferromagnetischen Proben viel größere Bedeutung zukommt als bei nichtmagnetischen. Bei nicht exakter und nicht exakt reproduzierbarer Lage des Streifens muß mit nicht unbedeutenden Meßfehlern gerechnet werden. Darauf hat unter anderem auch JAN⁴ hingewiesen. Aus Abb. 1 entnehmen wir, daß bei einer Verdrehung um 5° die HALL-Spannung des Ni bereits um ca. 7% absinkt, während der entsprechende Abfall bei Ag nur 6% beträgt.

Abschließend sei nur noch vermerkt, daß auch diese Teiluntersuchung im Rahmen des vom Bundesministerium für Verkehr und Elektrizitätswirtschaft subventionierten Programms durchgeführt worden ist.

⁴ J. P. JAN, *Helv. Phys. Acta* **25**, 677 [1952].

Ein Verfahren zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit dünner Proben bei hohen Temperaturen*

VON FRANZ PH. POTT **

Aus dem Institut für Physikalische Chemie der Universität Münster (Westf.)
(Z. Naturforsch. **13 a**, 116—125 [1958]; eingegangen am 15. Dezember 1956)

Es wird eine Methode beschrieben, mit der die Wärmeleitfähigkeit dünner Metallstreifen bis zu hohen Temperaturen unter gleichzeitiger experimenteller Berücksichtigung der Abstrahlungsverluste gemessen werden kann. Die im Experiment auftretenden Störeinflüsse durch parasitäre Thermospannungen, unsymmetrische Temperaturverteilung längs der Probe, ungleiche Temperaturen oberhalb und unterhalb der Probe, nichtstationäre Vorgänge, Änderung der Abstrahlungsverhältnisse während der Versuchsdurchführung und Wärmeverluste an den Schmalseiten der Probe werden in Korrekturrechnungen berücksichtigt. Erfolgen die Messungen im Hochvakuum, dann läßt sich aus den Abstrahlungsverlusten das Absorptionsvermögen der Probenoberfläche für die Temperaturstrahlung berechnen.

Bei Wärmeleitfähigkeitsmessungen sind störende Wärmeverluste nicht zu vermeiden. Bisher war man bestrebt, sie durch experimentelle Maßnahmen, ins-

besondere durch Schutzringheizung¹, zurückzudrängen oder mit Hilfe von Korrekturrechnungen² zu berücksichtigen. Diese Methoden lassen sich auf

* Auszug aus dem theoretischen Teil der Dissertation: Untersuchungen zur Gültigkeit des WIEDEMANN-FRANZ-LORENZschen Gesetzes an Unordnungs- und Ordnungsphasen der Kupfer-Palladium-Legierungsreihe unter Anwendung einer neuen Methode zur Messung der Wärmeleitfähigkeit bei hohen Temperaturen, Münster (Westf.) 1955.

** Jetzt Braunschweig, Physikalisch-Technische Bundesanstalt.

¹ z. B. R. W. POWELL, *Proc. Phys. Soc., Lond.* **46**, 659 [1934].

² z. B. W. JAEGER u. H. DIESELHORST, *Wiss. Abh. PTR* **3**, 269 [1900].